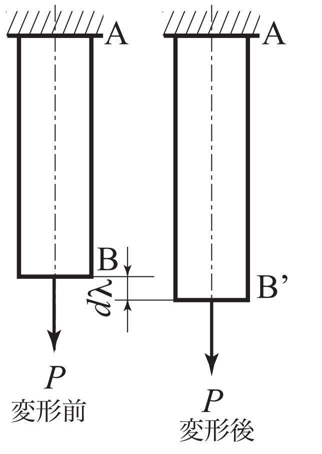
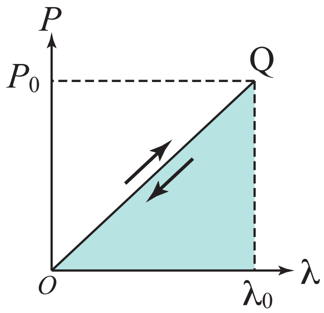
ひずみエネルギー　　　　　　　単軸引張の場合



図－１　引張力を受ける軸



図－２　荷重－伸び線図

図－１に示すように一端Ａを剛性壁に固定された断面形状が一様で、軸に垂直な断面積が A_0、初期長さ l_0 を持つ軸の他端Ｂに軸に沿った引張力 P が作用した結果、軸が力の作用方向に $d\lambda$ だけ伸びたとすると、引張力 P のした仕事 dW は、

$$dW = Pd\lambda$$

で与えられる。この軸を図－２に示す荷重－伸び線図上のＱ点まで引張ったときの引張力の仕事（外力仕事）W は、上式を０から λ_0 まで λ で積分すればよい。

$$W = \int_0^{\lambda_0} Pd\lambda \quad \text{-----------------------------}（１）$$

上式は引張力 P を λ で積分する式であるから、引張力 P を λ の関数として示す必要がある。この物体の縦弾性係数を E、軸の伸びを λ とすれば、垂直応力 σ と垂直ひずみ ε の関係は

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{---------------------------------}（２）$$

であり、垂直応力 σ および垂直ひずみ ε の定義から、

$$\sigma = \frac{P}{A_0}, \quad \varepsilon = \frac{\lambda}{l_0} \quad \text{-------------------------}（３）$$

であるから、式（３）の関係を式（２）に代入すれば、

$$\frac{P}{A_0} = E\frac{\lambda}{l_0}$$

上式を P について解けば、

$$P = E\frac{A_0}{l_0}\lambda$$

となる。上式を式（１）に代入すれば、

$$W = \int_0^{\lambda_0} Pd\lambda = \int_0^{\lambda_0} E\frac{A_0}{l_0}\lambda d\lambda = \frac{E}{2}\frac{A_0}{l_0}\lambda_0^2 = \frac{1}{2}\left(E\frac{A_0}{l_0}\lambda_0\right)\lambda_0 = \frac{1}{2}P_0\lambda_0 = \frac{1}{2E}\frac{l_0}{A_0}P_0^2$$

すなわち、

$$W = \int_0^{\lambda_0} Pd\lambda = \frac{E}{2}\frac{A_0}{l_0}\lambda_0^2 = \frac{1}{2}P_0\lambda_0 = \frac{1}{2E}\frac{l_0}{A_0}P_0^2 \quad \text{----------------------------}（４）$$

となる。つまり、軸に作用する力（外力）は、図－２に示す三角形 $O\lambda_0Q$ の面積の仕事を物体（軸）にしたことになる。荷重－伸びの線上をＯ点から出発しＱ点に到達後、荷重を減じると、Ｑ点からＯ点まで荷重－伸びの線上を戻ってくる。つまり、物体が外部に対して三角形 $O\lambda_0Q$ の面積の仕事をしたことになる。物体で考えれば、物体は外力によって $P_0\lambda_0/2$ の仕事をしてもらいＱ点に到達するが、外力によってなされた仕事をエネルギーとして内部に蓄える。一方、物体は外部に対して仕事をすることにより、その蓄えたエネルギーを放出して元の状態Ｏ点に戻る。このように物体は外力により変形させられるが、物体は外力が物体を変形をさせるに要した仕事を内部にエネルギーとして蓄えている。この蓄えたエネルギーを**ひずみエネルギー**といい、これを文字 U で表わす。また、物体は変形した状態から初期の状態に戻ることにより外部に対して仕事をし、蓄えたひずみエネルギー U を放出する。物体が内部に蓄えたひずみエネルギー U と外力によってなされた仕事 W は、負荷される荷重によって生ずる応力が弾性限度以下であれば等しい大きさを持つ。

単位体積当たりのひずみエネルギー u は、式（１）の両辺を軸の体積 $A_0 l_0$ で割り算すれば得られ、

$$u=\frac{W}{A_0 l_0}=\frac{1}{A_0 l_0}\int_0^{\lambda_0} P d\lambda=\int_0^{\lambda_0}\frac{P}{A_0}d\left(\frac{\lambda}{l_0}\right)$$

ここで式（３）の関係と垂直応力 σ と垂直ひずみ ε の関係式、

$$\sigma=E\varepsilon$$

に注意し、

$$\sigma_0=\frac{P_0}{A_0},\quad \varepsilon_0=\frac{\lambda_0}{l_0}$$

表１　積分変数の変域

λ	0	→	λ_0
$\varepsilon(=\lambda/l_0)$	0	→	ε_0

とおけば、単位体積当たりのひずみエネルギー u は、上式を変形し、表１を参照すれば、

$$u=\int_0^{\varepsilon_0}\sigma d\varepsilon=\int_0^{\varepsilon_0}E\varepsilon d\varepsilon=\frac{1}{2}E{\varepsilon_0}^2=\frac{1}{2}(E\varepsilon_0)\varepsilon_0=\frac{1}{2}\sigma_0\varepsilon_0=\frac{1}{2E}{\sigma_0}^2$$

すなわち、

$$u=\int_0^{\varepsilon_0}\sigma d\varepsilon=\frac{1}{2}E{\varepsilon_0}^2=\frac{1}{2}\sigma_0\varepsilon_0=\frac{1}{2E}{\sigma_0}^2 \quad \text{-----}（５）$$

で求められる。物体全体のひずみエネルギー U は、式（４）の W を U に置き直して、

$$U=\int_0^{\lambda_0}P d\lambda=\frac{E}{2}\frac{A_0}{l_0}{\lambda_0}^2=\frac{1}{2}P_0\lambda_0=\frac{1}{2E}\frac{l_0}{A_0}{P_0}^2 \quad \text{-----}（６）$$

で求められる。